

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ОБЪЕКТА С ПОМОЩЬЮ
ПАКЕТА MATLAB

Часто возникает следующая задача. Известны дифференциальные уравнения, описывающие динамику объекта:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_m), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где y_1, y_2, \dots, y_n – фазовые координаты объекта; t – время; p_1, p_2, \dots, p_n – параметры, которые можно варьировать в определенных пределах.

Требуется найти такие значения параметров, при которых движение объекта будет оптимальным, т.е. некоторая функция качества движения при найденных параметрах примет экстремальное значение. Если функция $y_i(t)$ описывает отклонение i -той фазовой координаты движения объекта от желаемой траектории, то часто в качестве критерия оптимальности выбирают минимум функции

$$F(p_1, p_2, \dots, p_m) = \int_0^T \left[y_i^2(t) + k^2 \left(\frac{dy_j}{dt} \right)^2 \right] dt, \quad (2)$$

где $(0, T)$ – промежуток времени, в котором изучается движение объекта; k – весовой коэффициент, характеризующий важность (вес) скорости отклонения по сравнению с отклонением; $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Выбирая параметры объекта так, чтобы минимизировать интеграл (2), запрещаем на промежутке $(0, T)$ существование значительных отклонений $y_i(t)$ (иначе составляющая

$$\int_0^T y_i^2(t) dt$$

интеграла (2) будет велика), но также запрещаем существование больших значений производных dy_j/dt (иначе составляющая

$$\int_0^T \left(\frac{dy_j}{dt} \right)^2 dt$$

интеграла (2) будет велика) [1].

В пакете программирования Matlab имеются специальные функции функций для решения системы дифференциальных уравнений (1), для вычисления интеграла (функции (2)) и для минимизации этой

функции [2]. Поэтому программа для решения поставленной задачи в пакете программирования Matlab получается чрезвычайно компактной и удобной для пользователя.

Рассмотрим конкретный пример, который проиллюстрирует предлагаемую методику выбора оптимальных параметров и позволит легко перейти к решению других подобных задач.

Найти оптимальные параметры p_1 и p_2 динамического гасителя колебаний [3]. Метод динамического гашения колебаний состоит в присоединении к объекту виброзащиты, моделируемого сосредоточенной массой m_1 , дополнительной массы m_2 с помощью пружины с жесткостью p_1 и вязкого демпфера с коэффициентом трения p_2 .

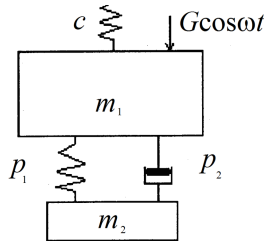


Рис. 1. Схема объекта виброзащиты и динамического гасителя колебаний

Дифференциальные уравнения колебаний массы m_1 с гасителем m_2 имеют следующий вид:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + p_2 \left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt} \right) + c_1 y_1 + p_1 (y_1 - y_2) = G \cos \omega t; \\ m_1 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + p_2 \left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \right) + p_1 (y_2 - y_1) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где y_1, y_2 – абсолютные координаты перемещений масс соответственно m_1 и m_2 ; $G \cos \omega t$ – периодическая сила, действующая на объект.

Система (3) в нормальной форме Коши запишется так:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_3; \\ \frac{dy_2}{dt} = y_4; \\ \frac{dy_3}{dt} = (G \cos \omega t - c_1 y_1 - p_1 (y_1 - y_2) - p_2 (y_3 - y_4)) / m_1; \\ \frac{dy_4}{dt} = (p_1 (y_2 - y_1) - p_2 (y_3 - y_4)) / m_2. \end{cases} \quad (4)$$

Оптимальными будем считать такие параметры p_1 и p_2 в системе (4), которые обеспечивают минимум функции

$$F(p_1, p_2) = \int_0^T [y_1^2 + k^2 y_3^2] dt, \quad (5)$$

которая является частным случаем функции (2).

Функцию (5) в системе программирования Matlab будем вычислять с помощью следующего m -файла.

На рис. 2 после знака "%" приведены комментарии, объясняющие смысл соответствующего оператора (операторов), находящихся левее этого знака.

Заметим, что с помощью процедуры, изображенной на рис. 2, вычисляются значения целевой функции (5) в зависимости от значений параметров p_1 и p_2 . Значения этих параметров задает оптимизирующая по этим параметрам функция (см. строку 3 на рис. 2) при обращении к ней.

Рассмотрим процедуру оптимизации по параметрам целевой функции (5). В пакете программирования Matlab имеется функция для безусловной минимизации по методу Нелдера-Мида функции многих переменных. Обращение к ней имеет вид:

$$[M, f] = f \text{minsearch}(\text{'название минимизируемой функции'}, [p_{1n}, p_{2n}]), \quad (6)$$

где $[p_{1n}, p_{2n}]$ – вектор начальных значений параметров p_1 и p_2 , с которых начинается минимизация.

Чтобы воспользоваться минимизирующей функцией (6), достаточно набрать строку (6) в командном окне пакета программирования Matlab и после этого нажать клавишу Enter или оформить строку (6) в виде отдельного m -файла и затем пустить его на исполнение. Так как при вычислении целевой функции (строка 27 на рис. 2) нет знака ";", запрещающего печать результата, то в командном окне печатаются текущие значения целевой функции z в процессе поиска ее минимума по параметрам p_1 и p_2 . В конце процесса минимизации в командном окне печатаются оптимальные значения параметров и целевой функции.

Следует отметить, что от выбора координат вектора $[p_{1n}, p_{2n}]$ зависит успех при поиске минимального значения целевой функции, т.к. функция (6) ищет локальный минимум, а не глобальный. Но, как показывают численные эксперименты, при поиске минимума целевой функции (5), значение которой вычисляется с помощью файла, изображенного на рис. 2, координаты начального вектора параметров можно менять в широких пределах. Так поиск минимума на промежутке времени (1;40) из начальных точек: (1;2), (1;0), (3;0), (5;0), (10;1),

```

1 function z=test5(x) % Название оптимизируемой функции.
2 % Пустая строка.
3 p1 = x(1);p2 = x(2); % Присвоение параметрам значений
4 % аргументов оптимизирующей функции.
5 if p2>=0 % Подготовка штрафной функции для случая
6 % отрицательных значений параметра p2
7 k=0; % при оптимизации функции (5).
8 else
9 k=100;
10 end
11 tspan = [0 40]; % Промежуток интегрирования системы
12 % дифференциальных уравнений (4).
13 y0 = [0; 0; 0; 0]; % Вектор-столбец начальных условий для
% системы (4).
14 option=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',6e-3);
15 % Задание точности решения системы
% уравнений (4).
16 [t y]=ode45(@f,tspan,y0,options,p1,p2);
17 % Функция, решающая систему уравнений (4).
18 t1=t';y1=y(:,1)';y3=y(:,3)';
19 % Транспонирование векторов-столбцов
% в векторы-строки.
20 %plot(t1,y1) % Если убрать знак комментария в начале
% строки, то этот оператор построит график
% фазовой координаты y1 (V).
21
22 Y1=y1.^2;Y3=y3.^2;Y=1*Y1+0*Y3;
23 % Вычисление подынтегрального выражения
% в правой части равенства (5).
24%plot(t1,Y) % Если убрать знак комментария в начале
25 % строки, то этот оператор построит график
26 % подынтегрального выражения равенства (5).
27 z=trapz(t1,Y)-k*p1 % Первый оператор в правой части равенства
28 % вычисляет целевую функцию (5), второй –
29 % добавляет штраф при p2 < 0.
30 % Пустая строка, отделяющая другую
% функцию.
31 function dydt=f(t,y,p1,p2)
32 % Название функции, определяющей правые
% части системы (4).
33 dydt=[y(3) % Вектор-столбец правых частей системы
34 y(4) % дифференциальных уравнений (4).
35 (cos(2*t)-4*y(1)-p1*(y(1)-y(2))-p2*(y(3)-y(4)))/1
36(p1*(y(1)-y(2))+p2*(y(3)-y(4)))/0.1];

```

Рис. 2. Листинг *m*-файла для вычисления целевой функции (5)

(30;10) при частоте внешнего возмущения $\omega = 4$ привел к одному результату с оптимальными значениями

$$p_1 = 1,5768, p_2 = 0,0252, z = 0,1214. \quad (7)$$

Отметим, что пример выбора оптимальных значений параметров динамического гасителя колебаний выбран в качестве тестового, т.к. для этой задачи известны приближенные значения оптимальных параметров [3]. Известно, что оптимальное гашение вынужденных колебаний (частное решение системы (3)) наступает в том случае, когда

$$\sqrt{\frac{p_1}{m_2}} = \omega, \quad p_2 = 0, \quad (8)$$

т.е. когда частота колебаний массы m_2 совпадает с частотой ω внешнего гармонического возмущения. В этом случае в рассматриваемой двухмассовой системе возникает явление антирезонанса, когда реакция гасителя (массы m_2) равна по величине внешнему возбуждению, но противоположна ему по знаку, что обеспечивает компенсацию колебаний массы m_1 . При минимизации функции (5) ищется наименьшее значение общего решения системы (3), а не только частного. Но так как свободная составляющая общего решения с ростом времени затухает, то оптимальные параметры p_1 и p_2 в нашем случае должны примерно удовлетворять условию (8). При частоте внешнего возмущения $\omega = 4$ найденное выше оптимальное значение параметра $p_1 = 1,5768$. Масса гасителя колебаний выбрана равной 0,1. Отсюда вытекает, что частота собственных колебаний гасителя

$$\omega_{\Gamma} = \sqrt{\frac{p_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{1,5768}{0,1}} = 3,97 \cong 4 = \omega.$$

При частоте внешнего резонансного возмущения $\omega = 2$ вычисленные оптимальные значения параметров $p_1 = 0,3931$, $p_2 = 0,0138$. И в этом случае частота собственных колебаний массы гасителя удовлетворяет условию

$$\omega_{\Gamma} = \sqrt{\frac{p_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{0,3931}{0,1}} = 1,9827 \cong 2 = \omega.$$

Другими словами, вычисленные оптимальные параметры гасителя колебаний почти удовлетворяют условиям (8), что подтверждает правильность выбранной здесь методики расчета оптимальных параметров.

Точно удовлетворить условию (8) вычисленные оптимальные параметры p_1 и p_2 не могут, так как здесь ищутся условия оптимального гашения колебаний основной массы m_1 , а не только ее вынужденной составляющей (частного решения системы (3)).

В заключении заметим, что хотя приведенная здесь методика расчета оптимальных параметров верна для любого случая, в приведенном примере рассматривался случай резонансных колебаний массы m_1 т.е. случай, в котором $\sqrt{c_1/m_1} = \omega$, т.к. в этом случае эффект от гашения колебаний массы m_1 более значительный. Этот эффект наглядно виден, если в файле, изображенном на рис. 2, в строке 3 вместо переменных $x(1)$ и $x(2)$ записать оптимальные значения параметров p_1 и p_2 , убрать знак комментария в строке 17 на рис. 2 и пустить полученный файл на исполнение.

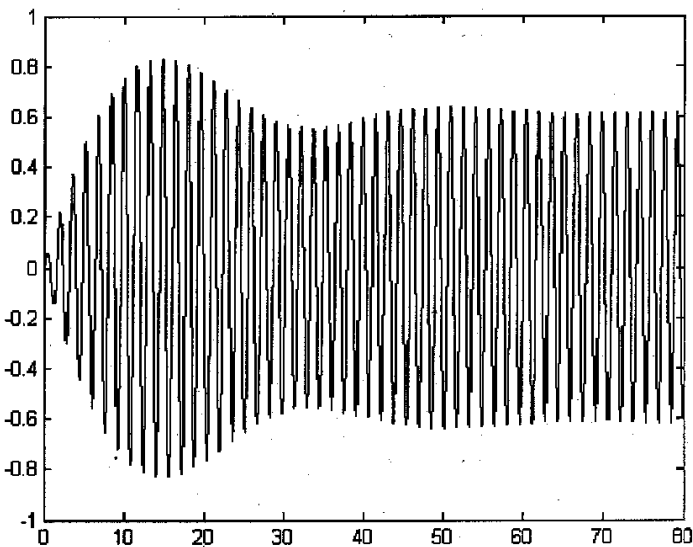


Рис. 3. Колебания массы m_1 при значениях параметров $p_1 = p_2 = 1$

На рис. 3 и 4 изображены резонансные колебания массы m_1 при значениях параметров $p_1 = p_2 = 1$, которые не являются оптимальными, и при оптимальных значениях этих параметров: $p_1 = 1,5768$, $p_2 = 0,0252$ для случая, когда частота внешнего возмущения $\omega = 4$, а отношение масс $m_2/m_1 = 0,1$. Здесь на горизонтальной оси отложено время t , на вертикальной – $y_1(t)$.

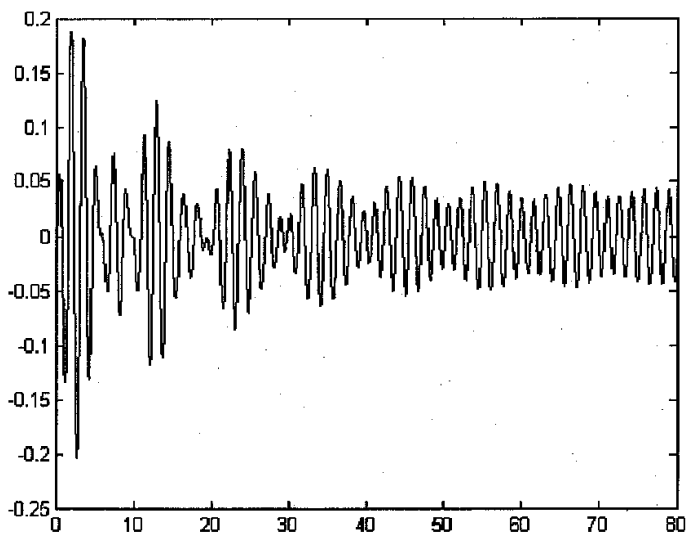


Рис. 4. Колебания массы m_1 при оптимальных настройках гасителя колебаний

Сравнивая эти рисунки, видим, что эффект гашения колебаний при оптимальных настройках гасителя значительный.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Наука, 1966. – 623 с.
2. Дьяконов В. П. Matlab 6/6.1/6.5 + Simulink 4/5. Основы применения. М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 767 с.
3. Вибрации в технике: справочник. Том 6. – М.: Машиностроение, 1981. – 456 с.