

СИНТЕЗ ПИ- РЕГУЛЯТОРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Под синтезом регуляторов систем автоматического управления (САУ) понимается нахождение управляющих воздействий, позволяющих оптимальным образом поддерживать значения ключевых производственных параметров на заданном уровне [1]. Разработчики САУ решают ряд задач по обеспечению необходимых динамических показателей качества проектируемой системы и достижении требуемой точности [2, 4]. При этом задачи являются противоречивыми, так к примеру, увеличение быстродействия системы регулирования может привести к повышению колебательного характера переходных процессов и недопустимому перерегулированию. Решение этих задач ведет к использованию более дорогой элементной базы, позволяющей протекать сигналам с большими значениями амплитуд. А использование сглаживающих фильтров приводит к уменьшению быстродействия и, соответственно, к повышению длительности переходного процесса, а также к усложнению системы и росту ее стоимости. Поэтому при разработке САУ возникает проблема нахождения оптимального соотношения между быстродействием и колебательным характером протекающих процессов в рамках допустимых условий протекания технологического процесса.

По способу реализации выделяют два вида регуляторов: аналоговые и цифровые. Аналоговые регуляторы проектируются на основе частотных методов синтеза или формульных методов настроек [4]. Цифровые регуляторы синтезируются, в основном, на основе метода модального управления. И в сложных системах управления, когда необходимо обеспечить высокую точность регулирования, рекомендуется применять модальное управление [1, 2]. Использование данного принципа управления позволяет получить желаемую форму переходного процесса и реализовать требуемый функционал качества. Метод пространства состояний достаточно универсален и его можно применять для нелинейных многомерных систем.

Рассмотрим линейную одномерную систему (или SISO – Single Input Single Output), уравнения состояний которой имеют следующий общий вид:

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + Bu(t);$$

$$y(t) = CX(t) + Du(t),$$

где $X(t)$ – вектор столбец состояния; A – матрица коэффициентов объекта; B – матрица входа; $u(t)$ – сигнал управления; Y – вектор выхода; C – матрица выхода; D – матрица влияния входа на выход системы, часто полагают $D = 0$.

Уравнение состояния SISO – системы в развернутом виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} u(t);$$

$$y(t) = [c_1 \dots c_2 \dots c_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Система, описываемая матрицами A и B , является управляемой, если существует такое неограниченное управление $u(t)$, которое может перевести объект из начального состояния $X(0)$ в любое другое состояние $X(t)$. Модальный синтез предполагает формирование таких обратных связей по состоянию, при которых обеспечивается заданное расположение полюсов замкнутой системы. Расположение полюсов в основном определяет характер переходного процесса в системе. Обычно рассматриваются такие корневые оценки качества переходного процесса, как время переходного процесса, степень устойчивости, колебательность и переуправление. В ряде исследований [1, 2] утверждается, что при использовании данного научного подхода, параметры регулятора строго привязаны к значениям параметров объекта и в случае воздействий на объект ряда неконтролируемых возмущений, модальный регулятор будет не эффективен. Рассмотрим подробнее данное наблюдение с целью определения области устойчивости модальной САУ. Пусть объект управления задан передаточной функцией

$$w(s) = \frac{11}{s^2 + 3s + 1}$$

и допустим, что по требованиям технологического процесса, объект должен функционировать в режиме слежения. Системе регулирования необходимо отработать задание $g(t) = 2$. Необходимо синтезировать

алгоритм управления, обеспечивающий заданные показатели качества: перерегулирование $\sigma = 0\%$ и время переходного процесса $t_n = 4$ с. Этот объект типового назначения, поэтому Δ -область составляет 0,05 ед. от установившегося значения переходного процесса, первое отклонение не превышает 25%, процесс аperiodический, время регулирования $T_p = 4$ с, и нулевая ошибка слежения. Необходимо найти требуемый полином.

Вследствие того, что объект управления описывается уравнением второго порядка, требуемый полином также должен быть второго порядка. Так как перерегулирование равно нулю, то в качестве полинома выбирается полином Ньютона [1] $D(\lambda) = \lambda^2 + 2\omega_0\lambda + \omega_0^2$. Для получения нормированной характеристики на объект управления подается единичный скачок, в результате характеристика разгона имеет вид, показанный на рис. 1.

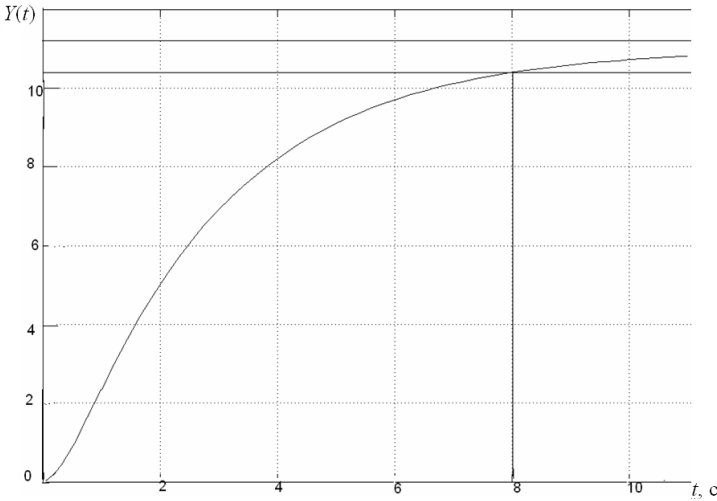


Рис. 1. Характеристика разгона

В связи с тем, что объект управления является объектом типового значения, на рисунке проводятся две линии, которые параллельны оси времени и проходят через точки $(0; 11,05)$ и $(0; 10,95)$. Эти линии определяют область установившихся значений или Δ -область. Время t_n^* , при котором переходный процесс входит в эту область и больше не покидает её, составляет 8 с, (см. рис. 1), а требуемое время регулирования $t_n = 4$ с. Тогда параметр частоты $\omega_0 = t_n^* / t_n = 2$ с.

Следовательно, требуемый полином приобретает вид: $D(\lambda) = \lambda^2$

$+4\lambda+4$. Корень требуемого характеристического полинома $\lambda = -2$. Далее необходимо перейти от передаточной функции объекта управления к векторно-матричной форме. Для этого передаточная функция объекта выражается через оператор дифференцирования $p=d/dt$ следующим образом:

$$w(p) = \frac{11}{p^2 + 3p + 1} = \frac{y}{u},$$

откуда в операторной форме: $p^2y + 3py + y = 11u$. Дифференциальное уравнение, описывающее поведение объекта, имеет вид:

$$y'' + 3y' + y = 11u. \quad (1)$$

На основании (1) создается структурная схема (рис. 2)

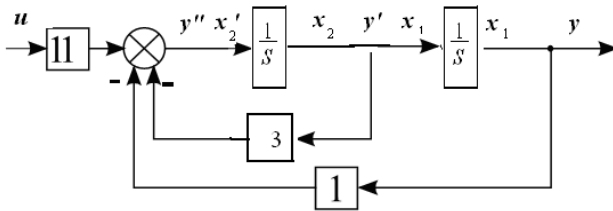


Рис. 2. Структурная схема объекта

Введя обозначения $x_1 = y$ и $x_2 = y'$, выражение (1) преобразуется:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 3x_2 + 11u; \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Тогда матрицы описания объекта управления приобретают вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix}; \quad C = (1 \ 0).$$

Для проверки расчета можно воспользоваться командами программы Matlab [3]: $W_1 = ss(A, B, C, D)$, и $W = tf(W_1)$. Поскольку порядок объекта управления равен двум, матрица управляемости:

$$U = |B \dots AB| = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 11 & -33 \end{pmatrix}.$$

С помощью команд программы Matlab: $V = ctrb(A, B)$ и $\text{disp}(\text{rank}(V))$ удобно определить значения данной матрицы и ее ранг без длительных вычислений. Ранг представленной матрицы равен двум, поэтому объект управления обладает свойством полной управляемости. Для

нахождения матрицы расширенных линейных стационарных обратных связей $\bar{K}=[K, K]$ необходимо решить уравнения Сильвестра [1] относительно матрицы M :

$$\begin{aligned}\bar{B}\bar{H} &= \bar{M}\bar{A} - \bar{A}\bar{M}; \\ \bar{K} &= -\bar{H}\bar{M}^{-1},\end{aligned}$$

где \bar{A} – матрица, определяющая требуемые динамические свойства системы; \bar{I} – матрица выхода эталонной модели; \bar{A} , \bar{B} – расширенные матрицы,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 \dots C \\ 0 \dots A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}.$$

Так как $\lambda = -2$, то матрицы эталонной модели формируются следующим образом [2]:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{I} = [1 \ 0 \ 0].$$

Таким образом, уравнение Сильвестра имеет вид:

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times [1 \ 0 \ 0].$$

Используя команду $M=\text{lyap}(A,R,Y)$ программы MatLab, получим решение представленного уравнения:

$$M = \begin{pmatrix} -1,37 & -1,64 & -0,44 \\ 2,75 & 2,34 & 0,57 \\ -5,50 & -2,50 & -0,50 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица M^{-1} находится командой: $M_1=\text{inv}(M)$, и ее значение:

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2,00 & -2,27 & -0,82 \\ 14,00 & 13,91 & 3,45 \\ -480000 & -44,54 & -10,27 \end{pmatrix}.$$

Для определения матрицы K используем команду: $K=-H*M_1$, в результате в командном окне программы получаем следующий результат: $K = [2,0000 \ 2,2727 \ 0,8182]$, т.е. коэффициент интегрирования $K_1=2$, а коэффициенты пропорциональности $K_1=2,27$, $K_2=0,82$. Для проверки полученных настроек модального ПИ-регулятора используем пакет Simulink (рис. 3, 4).

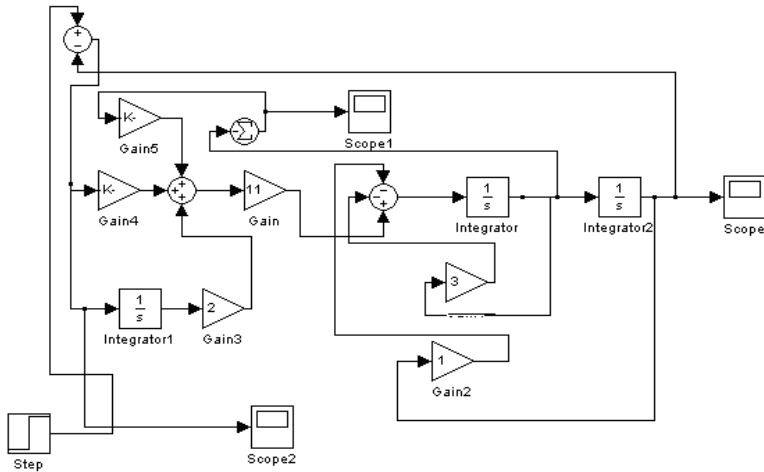


Рис. 3. Схема модальной САУ с объектом $w(s) = \frac{11}{s^2 + 3s + 1}$

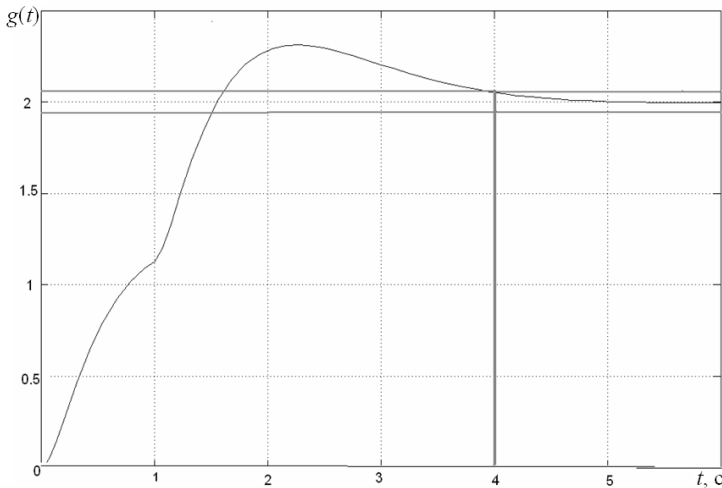


Рис. 4. Переходный процесс

Как видно из рис. 4, переходный процесс является аperiodическим второго порядка и полностью соответствует заданным показателям качества регулирования: $T_p = 4$ с, $g(t) = 2$. Для проверки утверждения об устойчивости модальной САУ при изменении значений объекта регу-

лирования (параметрическом возмущении) проводится виртуальный эксперимент. Пусть новой передаточной функцией объекта после действия параметрического возмущения является инерционное звено вида:

$$w(s) = \frac{20}{s^2 + 14s + 1}.$$

При неизменных значениях настроек регулятора (рис. 5), переходный процесс представленный на (рис. 6), демонстрирует, что происходит небольшое увеличение времени регулирования, система устойчива и поддерживает заданное значение. Таким образом, можно заключить, что модальные настройки ПИ-регулятора являются оптимальными и эффективно управляют объектом при увеличении его инерционных свойств, т.е. параметрическом возмущении, однако при изменении порядка объекта, модальная САУ требует адаптации.

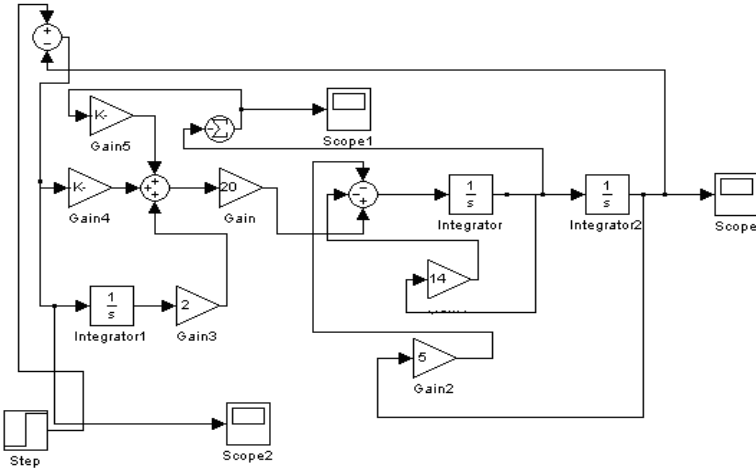


Рис. 5. Модальный ПИ-регулятор с объектом управления

$$w(s) = \frac{20}{s^2 + 14s + 1}$$

Таким образом при варьировании значений параметров объекта (передаточной функции) в небольших диапазонах, модальный ПИ-регулятор стабилизирует заданное значение в допустимых пределах с увеличением времени регулирования. Однако жесткая привязанность значений параметров регулятора к значениям параметров системы

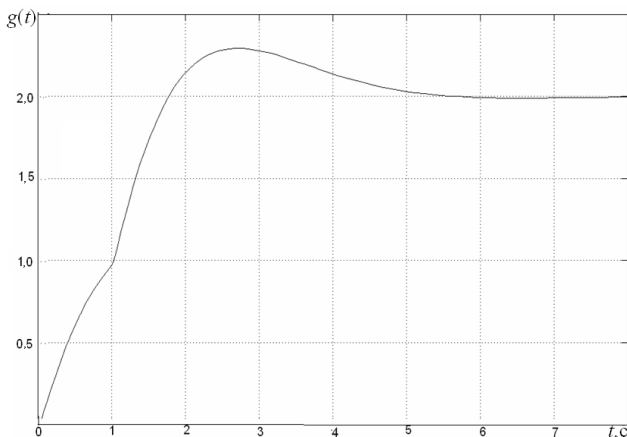


Рис. 6. Переходный процесс с объектом

$$w(s) = \frac{20}{s^2 + 14s + 1}$$

приводит к тому, что при недостаточной адекватности математической модели объекту регулирования, неучете звеньев с малыми постоянными времени, число параметров регулятора, подлежащих корректировке, становится значительным, из-за чего процесс перенастройки регулятора становится трудоемким и требует высокой профессиональной квалификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев В.В., Дроздов В.Н., Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. – Л.: Машиностроение, 1983. – 356 с.
2. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 3-х томах / Под ред. Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2000. – 578 с.
3. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. – СПб: Наука, 1999. – 467 с.
4. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы. – СПб.: Питер, 2005. – 336 с.